Title	非可換体ノ上ノ射影変換群
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 240 p.1248-p.1275
Issue Date	1942-08-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74996
rights	
Note	

1064. 非可換体ノ上ノ射影変換群

安倍　亮

$\mathfrak{K}$ ヲ任意ノ Schiefkörper, $V_{n+1}(\mathfrak{K})$ ヲ $n+1$ 次元 $\mathfrak{K}$ - 左加群トスル。V ノ $\mathfrak{K}$ - 部分加群全体ノ作ル束ヲ $\mathfrak{P}_{n+1}(\mathfrak{K})$ ト書キ,「$\mathfrak{K}$ ノ上ノ n 次元射影幾何學」ト呼ブコトニスル。ヨク知ラレテヰル様ニ, 之ハ $n+1$ 次元ノ irreducible, complemented, modular laticce デアリ, 逆ニカヽル lattice ハ ($n \geqq 3$, 又ハ

$n=2$ デ Desargues ノ定理ニ相當スル性質ヲ持ツバアヒニ), 通常ナ K ヲトレバ $V_{n+1}(K)$ ト同型デアル。$n=0, 1$ ノトキハ lattice トシテハ trivial デアルカラ, 當分考慮ノ外ニオク。$n=1$ ノトキハ後ニ考ヘル。

§1. Kollineation ノ解析的表現

$n \geqq 2$ トスル。$\mathfrak{V}_{n+1} = \mathfrak{V}_{n+1}(K)$ ノ (他ノ lattice ヘノ) 同型對應ヲ $\mathfrak{V}_{n+1}$ ノ Kollineation ト云フ。一ツ同型對應ガアレバ, スベテノ同型對應ヲ知ルニハ $\mathfrak{V}_{n+1}$ ノ自己同型ガ分レバヨイ。ソコデ $\mathfrak{V}_{n+1}$ ノ (lattice トシテノ) 自己同型ヲ單ニ $\mathfrak{V}_{n+1}$ ノ Kollineation ト云フコトニスル。先ヅ Kollineation ノ解析的表現ヲ求メテ見ル。

$V_{n+1}(K)$ ノ一ツノ K-Basis ヲ $\mathfrak{x}_0, \text{—}, \mathfrak{x}_n$ トスル, 即チ

$$V_{n+1}(K) = \mathfrak{x}_0 K + \cdots\cdots + \mathfrak{x}_n K$$

與ヘラレタ Kollineation デ「点」$(\mathfrak{x}_0)$[1] ト $(\bar{\mathfrak{x}}_0)$, ——, $(\mathfrak{x}_n)$ ト $(\bar{\mathfrak{x}}_n)$ ガ對應スルトスル。コノトキ点 $(\mathfrak{x}_0 + \cdots\cdots + \mathfrak{x}_n)$ ニハ $(\bar{\mathfrak{x}}_0 + \cdots\cdots + \bar{\mathfrak{x}}_n)$ ガ對應スルトシテヨイ。[2]) 任意ノ点 $(\sum \mathfrak{x}_i \lambda_i)$ ニ点 $(\sum \bar{\mathfrak{x}}_i \mu_i)$ ガ

1) 一般ニ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \cdots\cdots \in V_{n+1}(K)$ ノ生成スル Modul ヲ $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \cdots\cdots)$ ト書ク。一次元ノ Modul $(\mathfrak{x})$ ハ点ヲアラハス。

2) 点ヲアラハス Vektor ノ一次從屬性ハ $\mathfrak{V}_{n+1}$ ノ lattice

對應スルトシテ，μ_i ガドウナルカ分レバヨイ。

先ヅ直線 $(\mathfrak{y}_0)\vee(\mathfrak{y}_1)$ ニハ直線 $(\bar{\mathfrak{y}}_0)\vee(\mathfrak{y}_1)$ ガ對應スルカラ

$$(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda})\qquad \lambda,\bar{\lambda}\in\mathfrak{K}$$

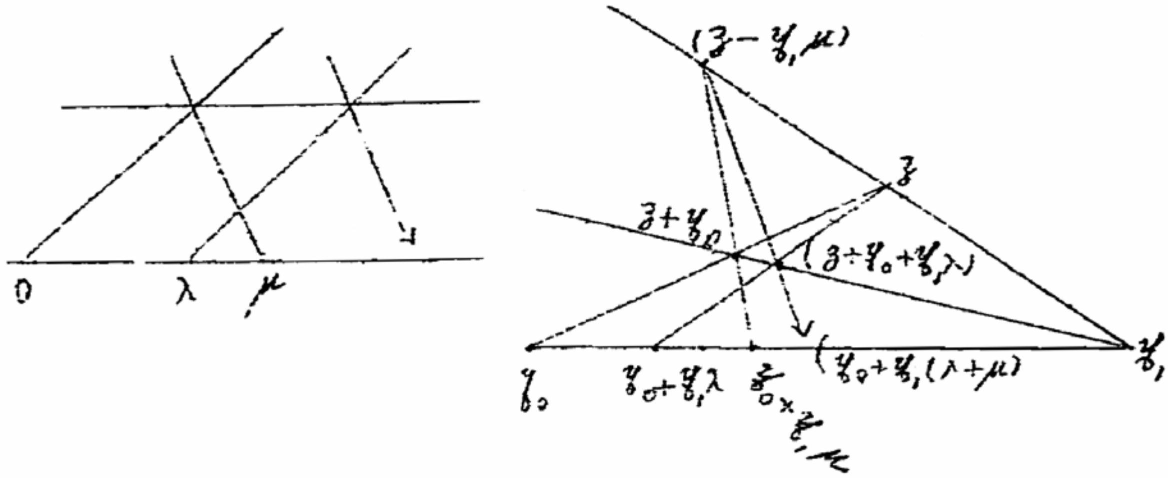
コノトキ $\bar{\lambda}=\sigma(\lambda)$ トオケバ，σ ガ $\mathfrak{K}$ ノ自己同型：

$$\sigma(\lambda+\mu)=\sigma(\lambda)+\sigma(\mu),\quad \sigma(\lambda\mu)=\sigma(\lambda)\sigma(\mu)$$

ニナルコトハ 例ニヨッテ，作図デ証明デキル。

即チ直線 $(\mathfrak{y}_0)\vee(\mathfrak{y}_1)$ ヲ含ムアル平面内デ，射影的ナ作図ニヨッテ点 $(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1(\lambda+\mu))$, $(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda\mu)$ ヲ求メルコトガデキ，Kollineation ニヨル像ガ丁度 $(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1(\bar{\lambda}+\bar{\mu}))$, $(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda}\bar{\mu})$ デ求メル図ニナルカラデアル。

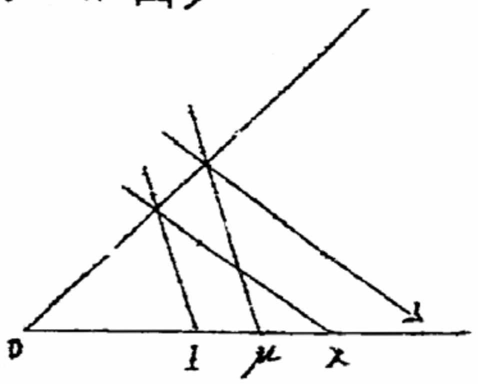
〔和ノ作圖〕

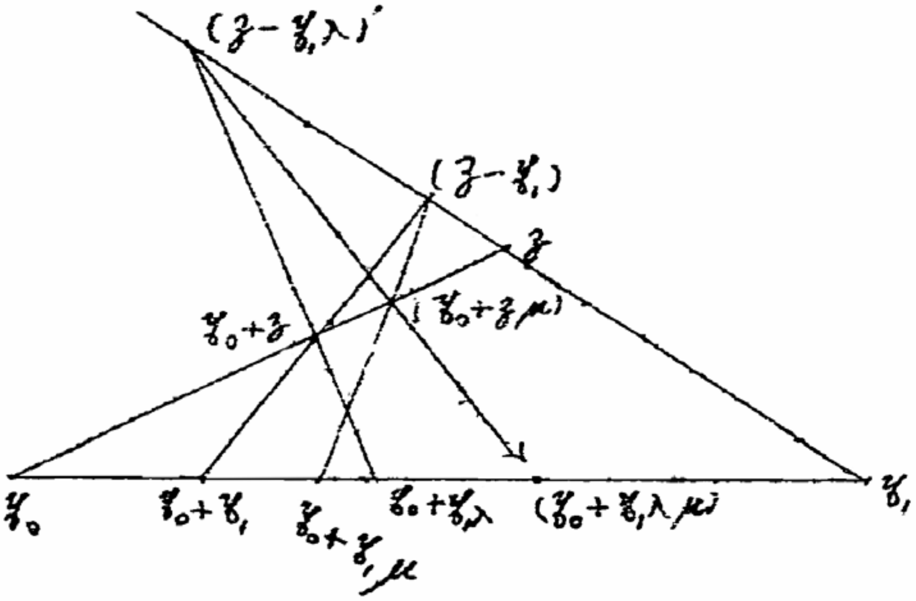


トシテノ性質デアルカラ，Kollineation デ保タレル。

故ニ $(\mathfrak{y}_0+\cdots\cdots+\mathfrak{y}_n)$ ニハ何カ $(\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0+\cdots\cdots+\bar{\mathfrak{y}}_n\lambda_n)$ ガ對應スル。シカルニ，$(\mathfrak{y}_0+\cdots\cdots+\mathfrak{y}_n)$, $(\mathfrak{y}_0)$, —, $(\mathfrak{y}_n)$ ノ中ドノ $n+1$ 個モ一次独立，∴ $((\sum\bar{\mathfrak{y}}_i\lambda_i))$, $(\bar{\mathfrak{y}}_0)$, —, $(\bar{\mathfrak{y}}_n)$ ノ中ドノ $n+1$ 個モ一次独立，従ッテ λ_0, —, λ_n ハスベテ $\neq 0$。∴ $\bar{\mathfrak{y}}_i\lambda_i$ ノ代リニ改メテ $\bar{\mathfrak{y}}_i$ ト書ケバ本文ノ様ニナル。

[積ノ作圖]





(図ニ於テ，括弧ヲ附ケタ坐標ハ，作図ニヨッテ他ノ坐標カラ定マルモノデアル)

結局 $(\xi_1)\longleftrightarrow(\bar{\xi}_1)$ ヲ含メテ云ヘバ.

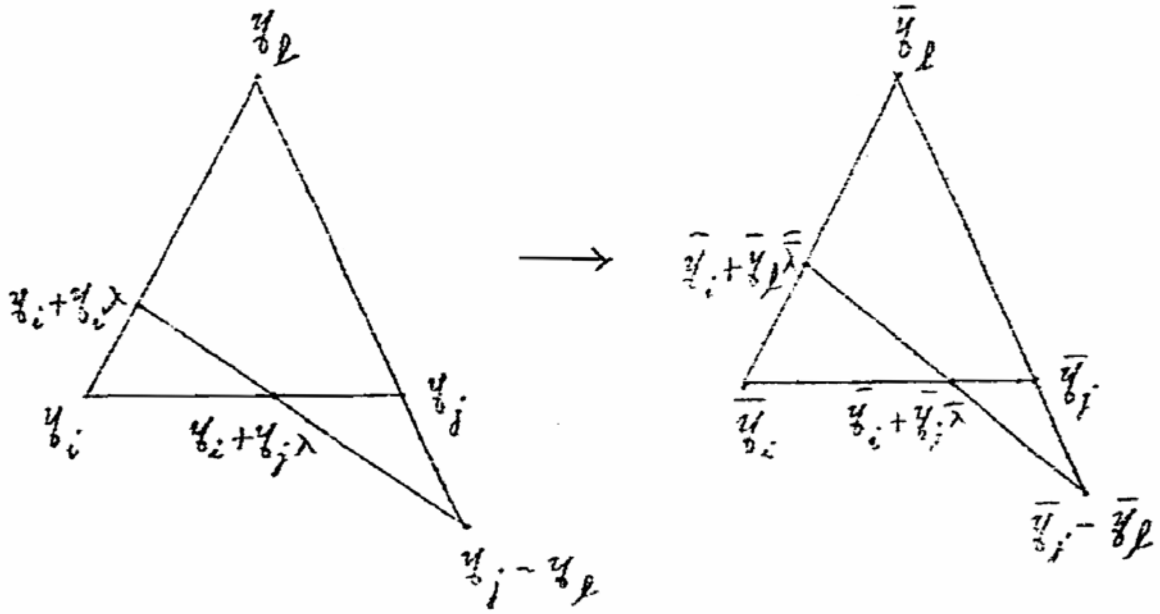
$$(\xi_0\lambda_0+\xi_1\lambda_1)\longleftrightarrow(\bar{\xi}_0\cdot\sigma(\lambda_0)+\bar{\xi}_1\cdot\sigma(\lambda_1))$$

一般ニ $(\xi_i)\cup(\xi_j)$ 上デ

$$(\xi_i\lambda_i+\xi_j\lambda_j)\longleftrightarrow(\bar{\xi}_i\cdot\sigma_{ij}(\lambda_i)+\bar{\xi}_j\cdot\sigma_{ij}(\lambda_j))$$

ココニ σ_{ij} ハ $\tilde{K}$ ノ自己同型デアルガ，実ハ i,j ノ如何ニ係ラズ皆同ジデアルコトガ次ノヤウニシテ分ル：$\sigma_{ij}=\sigma_{kl}$ ヲ云フニハ $\sigma_{ij}=\sigma_{il}$ ノ如ク共通ナ番号ノアルバアヒヲ証明スレバヨイ．$\sigma_{ij}=\sigma_{il}=\sigma_{kl}$ トナルカラデアル.

却テ $\sigma_{ij}(\lambda)=\bar{\lambda}$, $\sigma_{il}(\lambda)=\bar{\bar{\lambda}}$ トオケバ, Kollineation ニヨル左図ノ像トシテ右図ヲ得ル。



右ノ図ヨリ $\bar{\lambda}=\bar{\bar{\lambda}}$ ガ判ル. スナハチスベテノ σ_{ij} ハアル一ツノ σ ニ等シイ。

扨テ $(\sum y_i\lambda_i, y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)$

$$\frown (y_i, y_j) = (y_i\lambda_i + y_j\lambda_j)$$

ニハ $(\sum \bar{y}_i\mu_i, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{i-1}, \bar{y}_{i+1}, \ldots, \bar{y}_{j-1}, \bar{y}_{j+1}, \ldots, \bar{y}_n)$

$$\frown (\bar{y}_i, \bar{y}_j) = (\bar{y}_i\mu_i + \bar{y}_j\mu_j)$$

ガ對應スル. 即チ $(y_i+y_j(\lambda_j\lambda_i^{-1})) \leftrightarrow (\bar{y}_i+\bar{y}_j(\mu_j\mu_i^{-1}))$

ヨリ $\mu_j\mu_i^{-1}=\sigma(\lambda_j\lambda_i^{-1})$, 或ハ $\sigma(\lambda_i)^{-1}\mu_i=\sigma(\lambda_j)^{-1}\mu_j$

i, j ハ任意デアルカラアル $\rho\in\mathfrak{K}$ ガアリ, スベテノ i ニ對シテ $\mu_i=\sigma(\lambda_i)\rho$ [3]

$$\therefore\ (\sum y_i\lambda_i) \longleftrightarrow (\sum \bar{y}_i\mu_i) = ((\sum \bar{y}_i\sigma(\lambda_i))\rho)$$
$$= (\sum \bar{y}_i\sigma(\lambda_i))$$

---

3) 以上ハ $\lambda_i, \lambda_j \neq 0$ トシテノ結論デアルガ, $\lambda_i=0$ ナラバ $\mu_i=0$ デアルカラ (3) ハヤハリ成立ツ。

即チ「$\mathfrak{P}_{n+1}(k)$ ノ任意ノ Kollineation ハ $\sum y_i\lambda_i \longleftrightarrow \sum \bar{y}_i\sigma(\lambda_i)$ ノ形ニナル。但シ σ ハ k ノ自己同型[4]」逆ニ「$V_{n+1}(k)$ ノ二組ノ Basis, $y_0, \cdots, y_n$; $\bar{y}_0, \cdots, \bar{y}_n$ ト k ノ任意ノ自己同型 σ ヲトルトキ

$$(\sum y_i\lambda_i) \longleftrightarrow (\sum \bar{y}_i\sigma(\lambda_i))$$

ナル点ノ一對一對應ニヨリ, $\mathfrak{P}_{n+1}(k)$ ノ Kollineation ガ生ズル」コトハ明カデアル。

$$\bar{y}_k = \sum y_i s_{ik}, \quad s_{ik} \in k$$

即チ $(\bar{y}_0, \cdots, \bar{y}_n) = (y_0, \cdots, y_n)S$, $S = \begin{bmatrix} s_{00} & \cdots & s_{0n} \\ & \cdots & \\ s_{n0} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix}$

ト表ハセバ, $y_0, \cdots, y_n$ ヲ固定シタトキ, スベテノ Kollineation ハ $GL(k, n+1)$ (k ノ上ノ逆ノアル $n+1$ 次行列ノ作ル群) ノ行列 S ト k ノ自己同型 σ デ表ハサレル。

コノ Kollineation ヲ (S, σ) ト書クコトニスル。

$\sum y_i\lambda_i$ ニ先ヅ (S, σ) ヲ行ヒ次ニ (T, τ) ヲ行ヘバ

$$(\sum y_k\lambda_k) \to (\sum y_j \cdot s_{jk}\sigma(\lambda_k))$$
$$\to (\sum y_i t_{ij}\tau(s_{jk}\sigma(\lambda_k))),$$

故ニ $\tau(s_{jk})$ ノ作ル行列ヲ S^τ ト書ケバ

$$(T, \tau)(S, \sigma) = (TS^\tau, \tau\sigma)$$

---

4) 換言スレバ $\mathfrak{P}_{n+1}$ ノ Kollineation ハ V_{n+1} ノ halb lineare Transformation デ表ハサレル。

一ツノ Kollineation ヲ表ハス (S, σ) ハ一意的デハナイ。ソレハ $\bar{\mathfrak{y}}_0, \text{---}, \bar{\mathfrak{y}}_n$ ノ代リニ $\bar{\mathfrak{y}}_0\rho, \text{---}, \bar{\mathfrak{y}}_n\rho$ $(0 \neq \rho \in \mathfrak{K})$ ヲトルコトモ出来ルカラデアル。此ノトキ S ハ $S\rho$ トナリ，又

$$(\sum \mathfrak{y}_i\lambda_i) \longleftrightarrow (\sum \bar{\mathfrak{y}}_i\sigma(\lambda_i)) = (\sum(\bar{\mathfrak{y}}_i\rho)(\rho^{-1}\sigma(\lambda_i)))$$
$$= (\sum(\bar{\mathfrak{y}}_i\rho)(\rho^{-1}\sigma(\lambda_i)\rho))$$

デアルカラ，内部自己同型 $\rho^{-1}\lambda\rho = \underline{\rho}(\lambda)$ トオケバ，σ ノ代リニ $\underline{\rho}\sigma$ トナル。即チ

$$(S, \sigma) = (S\rho, \underline{\rho}\sigma)$$

即チ σ ハ内部自己同型ヲ除イテノミ定マルモノデアル。一ツノ Kollineation ヲ表ハス (S, σ) トシテハ上ノ様ナモノシカナイコトモ明カデアル。[5] 特ニ恒等変換 $(E, 1)$ ハモット一般ニハ

$$(\rho E, \underline{\rho})$$

ト表ハサレル。

$\mathfrak{K}$ ノ自己同型群ヲ $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{K})$，内部自己同型群ヲ $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\mathfrak{K})$ トスル。又 $\mathfrak{P}_{n+1}$ ノ Kollineation 全体ノ群ヲ $\mathfrak{G}$ トスル。

$$\mathfrak{G} \ni (S, \sigma) \rightarrow \mathfrak{J}\sigma \in \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$$

デ，$\mathfrak{G}$ ノ $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ 全体ヘノ Homomorphismus ガデキル。$\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ ノ単位元 $\mathfrak{J}$ ニ行ク $\mathfrak{G}$ ノ Normalteiler ヲ $\mathfrak{G}_0$

---

5) 実際與ヘラレタ Kollineation デ $(\mathfrak{y}_i) \longleftrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_i)$，$(\sum \mathfrak{y}_i) \longleftrightarrow (\sum \bar{\mathfrak{y}}_i)$ ニナル様ナ $\bar{\mathfrak{y}}_i$ ノトリ方ハ，$\bar{\mathfrak{y}}_0, \text{---}, \bar{\mathfrak{y}}_n$ ノ代リニ $\bar{\mathfrak{y}}_0\rho, \text{---}, \bar{\mathfrak{y}}_n\rho$ ヲトル事以外ニハナイ。

トスレバ

$$\mathfrak{a}/\mathfrak{J} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$$

$$\mathfrak{g}_0 = ((S, \underline{\rho}); S \in GL(k, n+1), \underline{\rho} \in \mathfrak{J}(k))$$

$\mathfrak{g}_0$ ノ Kollineation ヲ特ニ <u>lineare Kollineation</u> ト云フコトニスル。（ソノモット幾何学的ナ定義ハ後ニ考ヘルコトニスル）

$(S, \sigma) = (S\rho, \underline{\rho}\sigma)$ ヨリ, lineare Kollineation ハ必ズ $(S, 1)$ ノ形ニ書ケル。$(S, 1) = (T, 1)$ ニナルノハ $T = S\rho$ デ $\underline{\rho} = 1$ ナルバアヒ, 即チ ρ ハ k ノ Zentrum $Z = Z(k)$ ノ元デアル. 即チ

$(S, 1) = (T, 1) \rightleftarrows T = S\zeta$, $\zeta \in Z^*$ (Z ノ 0 以外ノ元ノ乗法群)[6)]

$\therefore$ $\mathfrak{g}_0 \cong GL(k, n+1)/Z^*$, Z^* ハ GL ノ Zentrum ニナッテ居ル。[7)]

従ッテ k ガ可換体ノ時ト全様

$$\mathfrak{g}_0 = PL(k, n+1)^{8)}$$

ト書クコトニスル。

---

6) 一般ニ Schiefkörper k ノ 0 以外ノ元ノナス乗法群ヲ今後常ニ k^* ト書クコトニスル。

7) 例ヘバ, 行列環 k_{n+1} ノ部分集合トシテ GL ハ k_{n+1} 全体ヲ生成スル事, k_{n+1} ノ（環トシテノ）Zentrum ガ Z デアルコトカラ分ル。

8) GL = general linear, PL = projective linear, 後ニ出ル SL = special linear, B.L.v. d. Waerden. Gruppen von linearen Transformationen ニヨル.

$\mathfrak{G}$ ノ構造

$\alpha, \beta, \cdots\cdots \in \mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ ハ「K ノ äußere Automorphismengruppe」ニ等シテ，夫々代表 $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \cdots\cdots$ ヲエランデオク。特ニ $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ ノ単位類 $\mathfrak{J}$ ノ代表トシテハ 1 ヲトル。

$$\mathfrak{A} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}/\mathfrak{J}} \mathfrak{J} \sigma_\alpha$$

$\mathfrak{G}$ ノ元ハ必ズ (S, σ_α) ノ形ニ書ケ，コノ形デ S ガ $\zeta \in Z^*$ ナル因数ヲ除イテ定マルコトハ，$(S, 1)$ ノ場合ト同様デアル。

$$(S, \sigma_\alpha) = (T, \sigma_\beta) \rightleftarrows \alpha = \beta,$$
$$T = \zeta S, \quad \zeta \in Z^*.$$

今 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(K)$ ノ構造ハ分ッテ居ルトシテ，$\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ ノ Faktorensystem ヲ

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = \underline{\rho_{\alpha,\beta}^{-1}}\, \sigma_{\alpha\beta}, \quad \underline{\rho_{\alpha,\beta}} \in \mathfrak{J}$$

ノ形ニ書ク.（$\rho_{\alpha,\beta} \in K^*$ ハ Z^* ノ元ヲ除イテ定マル）

此ノトキ

$$(T, \sigma_\alpha)(S, \sigma_\beta) = (T S^{\sigma_\alpha}, \sigma_\alpha \sigma_\beta)$$
$$= (T S^{\sigma_\alpha}, \underline{\rho_{\alpha,\beta}^{-1}}\, \sigma_{\alpha,\beta}) = (T S^{\sigma_\alpha} \rho_{\alpha,\beta}, \sigma_{\alpha\beta})$$

即チ $$(T, \sigma_\alpha)(S, \sigma_\beta) = (T S^{\sigma_\alpha} \rho_{\alpha,\beta}, \sigma_{\alpha\beta})$$

之ヨリ

$$(S, \sigma_\alpha)^{-1} = (\rho_{\alpha^{-1},\alpha} S^{-\sigma_{\alpha^{-1}}}, \sigma_{\alpha^{-1}})$$

ナル事モ分ルガ，別ニ後デ使ハナイ。

§2. $n=1$ ノバアヒ.

一次元ノ射影幾何學ハ，束トシテハ trivial デアッテ，束トシテノ自己同型ハ点ノ任意ノ一對一変換トナッテ了フカラ，ソレヲ Kollineation ト呼ブワケニハ行カナイ。

通常ハ調和列点ガ調和列点ニ移ルコトヲ條件ニ加ヘテ Kollineation ト呼ブ。調和列点ト云フ考ハ，勿論一次元ノ中デ束論的ニ特徴ヅケ得ルモノデハナク，考ヘル一次元空間ガ二次元以上ノ空間ニ einbetten サレテヰルモノト考ヘテ，始メテ外ノ空間デ束論的ニ定義出来ル。又坐標モソノ場合ニ始メテ入レルコトガ出来ル。点ハ $V_2(\mathfrak{K})=\mathfrak{y}_0\mathfrak{K}+\mathfrak{y}_1\mathfrak{K}$ ノ一次元 Teilmodul $(\lambda_0\mathfrak{y}_0+\lambda_1\mathfrak{y}_1)$ トシテ表ハサレ

$$(\mathfrak{y}),\ (\mathfrak{z});\ (\mathfrak{y}+\mathfrak{z}),\ (\mathfrak{y}-\mathfrak{z})$$

ナル二ツノ点対ガ互ニ他ヲ調和ニ分ツ。可換体 $\mathfrak{K}$ ノバアヒニハ，コノ関係ヲ保ツ点ノ一對一変換ハ

$$(\mathfrak{y}_0\lambda_0+\mathfrak{y}_1\lambda_1)\to(\bar{\mathfrak{y}}_0\bar{\lambda}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda}_1),\quad \bar{\lambda}=\sigma(\lambda)$$

デ σ ガ $\mathfrak{K}$ ノ自己同型ニナルガ，$\mathfrak{K}$ ガ一般ニ Schiefkörper ノ時ハ次ニ述ベルヤウニ必ズシモサウハナラナイ。

$\mathfrak{K}$ ノ Charakteristik $\chi(\mathfrak{K})=2$ ノトキハ，$(\mathfrak{y}+\mathfrak{z})=(\mathfrak{y}-\mathfrak{z})$ トナリ調和列点ノ不変ハ別ニ條件ヲ生ジナイカラ，今後 $\chi(\mathfrak{K})\neq 2$ トスル。一ツノ Kollineation ガアタヘラレタ時 $n\geqq 2$ ノトキト同様ニ

$$(\mathfrak{y}_0)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_0),\ (\mathfrak{y}_1)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_1),\ (\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1)$$

トル $\bar{\mathfrak{y}}_0, \bar{\mathfrak{y}}_1$ ハ共通ノ右因数ヲ除イテ定マル。コノトキ

$$(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda) \longleftrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda})$$

トスレバ $\bar{\lambda}=\sigma(\lambda)$ ハ λ ノ函数トシテ一意的ニ決ル。

$\lambda \longleftrightarrow \bar{\lambda}$ ハ一對一デアル。

特ニ $\sigma(0)=0 \qquad \sigma(1)=1$

1°. σ ハ体ノ加法ニ關スル自己同型デアル。即チ

$\sigma(\lambda+\mu)=\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)$

$$\because \quad (\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda) \longleftrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda})$$

$$(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\mu) \longleftrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\mu})$$

$\lambda \neq \mu$ ナラバ $\bar{\lambda} \neq \bar{\mu}$ デ

$$\big((\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda)-(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\mu)\big)=(\mathfrak{y}_1) \longleftrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_1)$$
$$=\big((\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda})-(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\mu})\big)$$

デアルカラ調和共軛点ヲ對應スル。

$$\big((\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda)+(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\mu)\big) \longleftrightarrow \big((\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda})+(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\mu})\big)$$

或ハ $$\left(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\frac{\lambda+\mu}{2}\right) \longleftrightarrow \left(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\frac{\bar{\lambda}+\bar{\mu}}{2}\right)$$

即チ $$\sigma\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)=\frac{\bar{\lambda}+\bar{\mu}}{2}=\frac{\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)}{2}$$

$\lambda=\mu$ ナラ *trivial* ニ成立ツ。又 $\mu=0$ トセバ

$$\sigma\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{\sigma(\lambda)}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma(\lambda+\mu)}{2}=\sigma\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)=\frac{\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)}{2}$$

$$\sigma(\lambda+\mu)=\sigma(\lambda)+\sigma(\mu) \qquad q.e.d.$$

2°. $\sigma\left(\dfrac{1}{\lambda^{-1}+\mu^{-1}}\right)=\dfrac{1}{\sigma(\lambda)^{-1}+\sigma(\mu)^{-1}}$, $\lambda\neq 0\neq\mu$

∵ $\lambda\neq\mu$, $\lambda\neq 0\neq\mu$ トスル。($\lambda=\mu\neq 0$ ノトキハ trivial)

$$(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda}),$$

$$(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\mu)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\mu})$$

コノトキ

$$((\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda)\lambda^{-1}-(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\mu)\mu^{-1})=(\mathfrak{y}_0)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_0)$$

$$=((\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda})\bar{\lambda}^{-1}-(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\mu})\bar{\mu}^{-1})$$

ダカラ，ソノ調和共軛点モ對應スル。

$$((\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda)\lambda^{-1}+(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\mu)\mu^{-1})\longleftrightarrow((\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\lambda})\bar{\lambda}^{-1}+(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\bar{\mu})\bar{\mu}^{-1})$$

或ハ $\left(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\dfrac{2}{\lambda^{-1}+\mu^{-1}}\right)\longleftrightarrow\left(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\dfrac{2}{\bar{\lambda}^{-1}+\bar{\mu}^{-1}}\right)$

即チ $\sigma\left(\dfrac{2}{\lambda^{-1}+\mu^{-1}}\right)=\dfrac{2}{\sigma(\lambda)^{-1}+\sigma(\mu)^{-1}}$,

2デ割リ $\sigma\left(\dfrac{1}{\lambda^{-1}+\mu^{-1}}\right)=\dfrac{1}{\sigma(\lambda)^{-1}+\sigma(\mu)^{-1}}$ q. e. d.

3°. 逆ニ

$$(A)\begin{cases}\sigma(1)=1\\ \sigma(\lambda+\mu)=\sigma(\lambda)+\sigma(\mu)\\ \sigma\left(\dfrac{1}{\lambda^{-1}+\mu^{-1}}\right)=\dfrac{1}{\sigma(\lambda)^{-1}+\sigma(\mu)^{-1}}\end{cases}$$

ヲ満足スル $\mathfrak{K}$ ノ一對一変換 σ ヲトレバ

$$(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\sigma(\lambda)),\quad(\mathfrak{y}_1)\longleftrightarrow(\bar{\mathfrak{y}}_1)$$

ニヨツテ調和列点ハ不変デアル。

$\because$ λ, μ, ν ハ互ニ異ルトシテ，$(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\lambda)$．$(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\mu)$ ニ関スル $(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\nu)$ ノ調和共軛点ヲ求メル。

$$\left((\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\lambda)\alpha+(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\mu)\beta\right)$$
$$=\left(\mathfrak{z}_0(\alpha+\beta)+\mathfrak{z}_1(\lambda\alpha+\mu\beta)\right)=(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\nu)$$

トナシタル＝ハ，$\nu(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\mu\beta$，

$$(\lambda-\nu)\alpha+(\mu-\nu)\beta=0$$

即チ $\alpha=(\lambda-\nu)^{-1}$，$\beta=-(\mu-\nu)^{-1}$ ト取レバヨイ。共軛点ハ $\left((\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\lambda)(\lambda-\nu)^{-1}+(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\mu)(\mu-\nu)^{-1}\right)$

$$=\left(\mathfrak{z}_0\left((\lambda-\nu)^{-1}+(\mu-\nu)^{-1}\right)+\mathfrak{z}_1\left(2+\nu\left((\lambda-\nu)^{-1}+(\mu-\nu)^{-1}\right)\right)\right)$$

$$=\left(\mathfrak{z}_0+\mathfrak{z}_1\left(\frac{2}{(\lambda-\nu)^{-1}+(\mu-\nu)^{-1}}+\nu\right)\right)$$

但シ $(\lambda-\nu)^{-1}+(\mu-\nu)^{-1}=0$ 即 $\nu=\dfrac{\lambda+\mu}{2}$ ノバアヒヲ除ク。

同様ニ $(\bar{\mathfrak{z}}_0+\bar{\mathfrak{z}}_1\bar{\lambda})$，$(\bar{\mathfrak{z}}_0+\bar{\mathfrak{z}}_1\bar{\mu})$ ニ関スル $(\bar{\mathfrak{z}}_0+\bar{\mathfrak{z}}_1\bar{\nu})$ ノ調和共軛点ハ同ジ形ニナルカラ，調和列点ガ不変ナタメニハ

$$\sigma\left(\frac{2}{(\lambda-\nu)^{-1}+(\mu-\nu)^{-1}}+\nu\right)=\frac{2}{(\bar{\lambda}-\bar{\nu})^{-1}+(\bar{\mu}-\bar{\nu})^{-1}}+\bar{\nu}$$

デナケレバナラナイガ，実際ハ夫ハ (A) ニヨッテ云ヘテヰル。

$\nu=\dfrac{\lambda+\mu}{2}$ ノバアヒ其ノ他一般ニ四点ノ中一点ガ $(\mathfrak{z}_1)$ ニナルバアヒモ，2° ノ推論ヲ逆ニ辿ッテ云ヘル。

4° (A) ノ第三式ニ於テ $\lambda=1+\rho$，$\mu=1-\rho$ トオケバ，λ, μ ハ可換ダカラ

$$\sigma\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\right)=\frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}}{\bar{\lambda}+\bar{\mu}} \qquad \text{即チ} \quad \sigma\left(\frac{1-\rho^2}{2}\right)=\frac{1-\bar{\rho}^2}{2}$$

$\underline{\sigma(\rho^2)=\bar{\rho}^2=\sigma(\rho)^2}$ ガ云ヘル。

$\lambda\mu+\mu\lambda=(\lambda+\mu)^2-\lambda^2-\mu^2$ ダカラ之ヨリ

$$\sigma(\lambda\mu+\mu\lambda)=\bar{\lambda}\bar{\mu}+\bar{\mu}\bar{\lambda}$$

即チ $\underline{\sigma(\lambda\mu)+\sigma(\mu\lambda)=\sigma(\lambda)\sigma(\mu)+\sigma(\mu)\sigma(\lambda)}$

特ニ $\underline{k\text{ ガ可換ナラ}}$

$$\sigma(\lambda\mu)=\sigma(\lambda)\sigma(\mu)$$

トナリ，従ッテ(A)ヲ満足スル $\underline{\sigma\text{ ハ }k}$ ノ自己同型デアル。

所ガ k ガ可換デナイト σ ハ必ズシモ自己同型ニナラナイ！ 何トナレバ (A) ノ十分條件ノ一ツトシテ，第三式ノ代リニ $\sigma(\lambda^{-1})=\sigma(\lambda)^{-1}$ ガアレバ，ソレデヨイ。所ガソノタメニハ例ヘバ σ ガ k ノ Reziprok-Automorphismus デアッテモヨイ。[9]

今後ハ σ ガ Automorphismus ノバアヒノミヲ考ヘ，ソレヲ矢張リ Kollineation ト名付ケル。特ニ σ ガ内部同型ナルトキ，lineare Kollineation ト呼ブ。

§3. PSL ノ単純性

GL$(k, n+1)$ ノ Kommutatorgruppe ヲ SL$(k, n+1)$ ト名付ケル。[10] 又 PL $(k, n+1)$ ノ Kommutatorgruppe ヲ PSL$(k, n+1)$ ト名付ケル．PL＝

---

9) A) ヲ満足スル σ ハ Automorphismus ト Reziprok-Automorphismus 以外ニ存在シ得ルデアラウカ。

GL/Z^* デアッタカラ

$$PSL(k, n+1) \cong Z^*, \ SL(k, n+1)/Z^*,$$

又ハ $PSL(k, n+1) \cong SL(k, n+1)/SL(k, n+1) \frown Z^*$

$SL \frown Z^*$ ハ実ハ SL ノ Zentrum ニナルカラ[11], $PSL(k, n+1)$ ハ $SL(k, n+1)$ ノ Zentrum ニヨル Faktorgruppe デアルト云ッテモヨイ。扨テ k ガ可換体トナル時ト同ジク，次ノ事実ガ証明サレル：

「k ガ任意ノ Schiefkörper ナルトキ，$PSL(k, n+1)$, $n \geqq 1$ ハスベテ単純群デアル。但シ $n=1$ ノ場合ニハ，k ハ $GF(2)$ 又ハ $GF(3)$ デナイトスル[12]」

以下ニ之ヲ証明スル。k ガ可換ナ場合ノ岩澤氏ノ証明[13] ヲ多少ノ注意ヲ以テ modify スレバ出来ル。

10) k ガ可換ナトキハ通常 SL ハ行列式 1 ナル GL ノ行列ノ全体トシテ定義サレル。実際行列式 1 ナルモノハ GL ノ Kommutatorgruppe トナルカラ（ソレハ以下ノ証明ノ途中デモ分ル），吾々ノ定義ト矛盾シナイ。k ガ非可換ノ時ハ行列式ハ考ヘラレナイカラ，此様ニ定義スルヨリ仕方ガナイ。

11) $SL \frown Z^*$ ガ SL ノ Zentrum ニ含マレルコトハ明デアルガ，丁度 Zentrum ニナル事ハ何ヘバ後ニ証明スル PSL ノ単純性カラ分ル。

12) 従ッテ k ガ実際非可換体デアル場合ニハ例外ハナイ。

13) Kenkiti Iwasawa: Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen [Proc. Imp. Acad. Tokyo, Vol. XVII (1941, 57–59)]

Lemma 「$SL(k, n+1)$ ハ

$$B_{i,j,\lambda} = E + \lambda e_{ij},^{(*)} \qquad i,j = 0, 1, \cdots n;\ i \neq j;\ \lambda \in k$$

ノ全体デ生成サレル. ($n=1$ 且 $k = GF(2)$ 又ハ $GF(3)$ ナル場合ヲ除ク)」

証明. $B_{i,j,\lambda}$ ノ生成スル GL ノ部分群ヲ $\mathfrak{G}$ トスル. $\mathfrak{G} = SL$ ヲ証明スルノガ目的デアル. 数段ニ分ケテ証明スル。

1°. $GL(k, n+1)$ ノ生成元.

$$T_{ij} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & & \vdots & 1 \ddots 1 & \vdots & \\ & & & -1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

ハ $T_{ij} = B_{ij,1} B_{ji,-1} B_{ij,1}$ ト書ケルカラ $T_{ij} \in \mathfrak{G}$

GL ノ任意ノ行列 S =

i) T_{ij} ヲ左カラ乗ズレニハ, S ノ第 i 行ト第 j 行ヲ入換ヘタ後, 第 j 行ノ符号ヲ変ヘレバヨイ.

ii) $B_{ij,\lambda}$ ヲ左カラ乗ズルニハ, S ノ第 j 行ニ左カラ λ ヲ乗ジテ第 i 行ニ加ヘレバヨイ.

iii) $B_{ij,\lambda}$ ヲ右カラ乗ズレニハ, S ノ第 i 列ニ右カラ λ ヲ乗ジテ第 j 列ニ加ヘレバヨイ.

任意ノ S ニ i) — iii) ノ Operation ヲ繰返シ行ッテ

(*) E ハ単位行列, e_{ij} ハ i 行 j 列ニノミ 1 ガアリ, 他ノ要素ハスベテ 0 ナル行列.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} & S^* & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

ノ形ニスルコトガデキル。[15] 更ニ S^* ニ就テ同ジ事ヲヤリ，順々ニ進メバ結局最後ニハ

$$
C_\mu = \begin{bmatrix} \mu & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}
$$

ノ形ニナル。即チ任意ノ S ニ対シ，適当ニ B'; $B'' \in \mathfrak{B}$ ヲトレバ

$$
B' S B'' = C_\mu
$$

ノ形ニナル。[16] 即チ

---

15) 詳シク述ベレバ次ノ通リデアル：S ハ逆ガアルカラ，第0列ノ要素ノ中ニハ0デナイモノガアル．故ニ（必要ナラバ）i) ノ操作ヲ行ッテ，$n0$−要素ガ0デナイ様ニ出来ル，次ニ操作 iii) ニヨリ，第0列ニ適当ナ λ ヲ掛ケテ第 n 列ニ加ヘレバ nn−要素ヲ1ニ出来ル。更ニ iii) ニヨリ第 n 列ニ適当ナ λ ヲ掛ケテソノ他ノ列ニ加ヘ第 n 行ノ nn−要素以外ヲ全部0ニ出来ル．仝様ニ ii) ニ依テ第 n 列ノ nn−要素以外ノ要素ヲ全部0ニ出来ル。

16) $\mathfrak{K}$ ガ可換体ノトキハ，$B_{ij,\lambda}$ シメガッテ $\mathfrak{B}$ ノスベテノ行列ハ行列式1ヲモツ．故ニ B', $B'' \in \mathfrak{B}$ ヲ左右カラ掛ケテモ行列式ノ値ハ変ラズ $|S| = |C_\mu| = \mu$，即チ μ ハ S ノ行列式ノ値トシテ，S カラ一意的ニ定マル．特ニ始メカラ $|S| = 1$ ナラ $B'SB'' = E$ トナリ $S \in \mathfrak{B}$．即チ $\mathfrak{B}$ ハ

「$GL(\mathfrak{K}, n+1)$ ハ

$$B_{ij,\lambda},\quad i,j=0,1,\cdots\cdots,n,\ \lambda\in\mathfrak{K}$$
$$C_\mu,\quad \mu\in\mathfrak{K}^*$$

デ生成サレル」

2° $\mathfrak{G}$ ハ GL ノ Normalteiler デアル。

1° ニヨリ $GL=(\{B_{ij,\lambda}\},\{C_\mu\})$ デアルカラ $C_\mu^{-1}B_{ij,\lambda}C_\mu\in\mathfrak{G}$ ヲ云ヘバヨイ。実際

$$C_\mu^{-1}B_{ij,\lambda}C_\mu=B_{ij,\lambda}\qquad i,j>0$$
$$C_\mu^{-1}B_{0i,\lambda}C_\mu=B_{0i,\mu^{-1}\lambda}\qquad i>0$$
$$C_\mu^{-1}B_{i0,\lambda}C_\mu=B_{i0,\lambda\mu}\qquad i>0$$

ナルコトハヤッテ見レバスグ分ル。

3°
$$D_\lambda=\begin{bmatrix}\lambda&&&\\&\lambda^{-1}&&\\&&1&\\&&&\ddots\\&&&&1\end{bmatrix}\in\mathfrak{G}$$

実際 D_λ ハ 1° ニ述ベタ Operation ヲ行ッテ単位行列ニ持ッテ行クコトガ出来ル。

$$\begin{bmatrix}\lambda&\\&\lambda^{-1}\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{i)}]{}\begin{bmatrix}&\lambda^{-1}\\-\lambda&\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{ii)}]{}\begin{bmatrix}&\lambda^{-1}\\-\lambda&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{iii)}]{}\begin{bmatrix}1&\lambda^{-1}\\0&1\end{bmatrix}\in\mathfrak{G}$$

系. 「群 $\mathfrak{G}$ ハ vollkommen デアル。即チ $\mathfrak{G}$ ノ Kom-

---

(前頁ノ続キ)
行列式1ナル行列ノ全体デアル。—— $\mathfrak{K}$ ガ非可換ノ場合ニハ，後ニ述ベル様ニ，$B'SB''=C_\mu$, $B', B''\in\mathfrak{G}$ ナル μ ハ S カラ一意的ニハ定マラナイ。

mutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ ハ

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$$

但シ $n=1$, $\mathfrak{k}=GF(2)$ 又ハ $GF(3)$ ナル場合ヲ除ク」[17)]

$n \geqq 2$ ナラ i, k ニ對シ，ソレラト異ナル第三ノ j ガトレテ

$$B_{ij,\lambda} B_{jk,\mu} B^{-1}_{ij,\lambda} B^{-1}_{jk,\mu} = B_{ik,\lambda\mu}$$

$\lambda\mu$ ハ $\mathfrak{k}$ ノ任意ノ元ヲ表ハシ得ル。即チ $\mathfrak{G}$ ノ生成元ハスベテ $\mathfrak{G}$ ノ交換子トシテカケル。

$n=1$

$$B_{01,\lambda} D_{\mu} B^{-1}_{01,\lambda} D^{-1}_{\mu}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & \\ & \mu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^{-1} & \\ & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda-\mu\lambda\mu \\ & \end{bmatrix}$$

$\kappa \in \mathfrak{k}$ ヲ任意ニ取ルトキ，$\kappa = \lambda - \mu\lambda\mu$ ナル $\lambda, \mu \in \mathfrak{k}$ ガアル。 ∵ $\mathfrak{k}$ ハ $GF(2)$ デモ $GF(3)$ デモナイカラ，$\kappa \in K$, $Z \subset K \subset \mathfrak{k}$ デ $GF(2)$ デモ $GF(3)$ デモナイ可換体 K ガアル。[18)] K ノ元デ $0, 1, -1$ 以外ノモノヲ任意ニ一ツ取ッテ μ トスレバ，$\lambda \in K$ ニ対シテハ $\lambda - \mu\lambda\mu = \lambda(1-\mu^2)$.

---

17) 筆者ハ始メ $Z(\mathfrak{k}) \neq GF(2), GF(3)$ トシテ証明シタ。$\mathfrak{k} \neq GF(2), GF(3)$ デ十分ナコトハ，河田敬義氏，岩澤健吉氏ノ御注意ニヨル。

18) $Z(\kappa) \neq GF(2), GF(3)$ ナラ $K = Z(\kappa)$ ト取レバヨイ。若 $Z(\kappa) = GF(2)$ 又ハ $GF(3)$ ナラ當然 $Z = Z(\kappa)$，即 $\kappa \in Z$ デ $Z = GF(2)$ 又ハ $GF(3)$. 假定ニヨリ $Z \neq \mathfrak{k}$ ダカラ $Z \subsetneqq K \subset \mathfrak{k}$ ナル可換体 K ガアル。

$1-\mu^2 \neq 0$ ダカラ，之ヘ入ヲ適當ニトレバKノ任意ノ元，特ニ$\varkappa$ヲ表ハスコトガ出来ル，即チ$B_{01,\varkappa}$ハスベテ$\mathfrak{G}$ノ元ノ交換子トシテ書ケル。$B_{10,\varkappa}$モ同様デアル。

5°. $\mathfrak{G}$ハ$GL(k, n+1)$ノ Kommutatorgruppe $SL(k, n+1)$ニ他ナラナイ。[19]

$$GL \supset \mathfrak{G} \text{ ヨリ } SL = (GL)' \supset \mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$$

逆ニ$SL = (GL)' \subset \mathfrak{G}$ヲ云ヘバヨイ。ソレニハ

$$GL = (\mathfrak{G}, (C_\mu))$$

デアッテ且ッGLノ mod $\mathfrak{G}$ ノ代表トシテC_μノ形ノ元ガトレルカラ$C_\lambda C_\mu C_\lambda^{-1} C_\mu^{-1} \in \mathfrak{G}$サヘ云ヘバヨイ。シカルニ

$$\begin{aligned} C_\lambda C_\mu C_\lambda^{-1} C_\mu^{-1} &= C_{\lambda\mu\lambda^{-1}\mu^{-1}} = C_{\lambda\mu\lambda^{-1}} C_\mu^{-1} \\ &= D_\lambda C_\mu D_{\lambda^{-1}} \cdot C_\mu^{-1} \end{aligned}$$

シカルニ$D_\lambda \in \mathfrak{G}$ 又ハ $\mathfrak{G}$ガ normalteiler ダカラ

$$C_\mu D_{\lambda^{-1}} C_\mu^{-1} \in \mathfrak{G}$$

故ニ左辺モ$\mathfrak{G}$ニ属スル。　　　　[Lemma ノ証明終]

サテ愈：$PSL(k, n+1)$ノ単純性ヲ証明スル。

先ヅPSLハ射影空間ノ点全体ノ置換群トシテ zweifach transitiv デアル。

ソレニハ，坐標ノ基本 Vektor ガ$\mathfrak{z}_0, \text{——}, \mathfrak{z}_n$ナル時，任意ノ二点$(\bar{\mathfrak{z}}_0) \neq (\bar{\mathfrak{z}}_1)$ニ對シ，$(\mathfrak{z}_0) \to (\bar{\mathfrak{z}}_0)$，$(\mathfrak{z}_1) \to (\bar{\mathfrak{z}}_1)$

---

19) kガ可換ナルトキハ，脚註16)ニヨリ$\mathfrak{G}$ハ行列式1ナル行列ノ全体デアルカラ，SLノ定義ハ普通ノ定義ト一致スル。

ナル如キPSLノKollineationガアルコトヲ云ヘベヨイ.
兎モ角ソノヤウナPLノKollineationハアル. ソレヲ
$(\mathfrak{S},1)$ トスル.

$$(\bar{\mathfrak{y}}_0, \text{—}, \bar{\mathfrak{y}}_n) = (\mathfrak{y}_0, \text{—}, \mathfrak{y}_n)\,\mathfrak{S}$$

GL/SL ノ nebenklasse ハ Lemma ノ証明中ニ述ベタ
ヤウニ C_μ デ代表サレルカラ, 適當ナ C_μ ヲトレバ,
$\mathfrak{S}C_\mu \in SL$, 先ヅ $(C_\mu, 1)$ ヲ行ヒ次ニ $(\mathfrak{S}.1)$ ヲ行ヘバ

$$(\mathfrak{y}_0) \longrightarrow (\mathfrak{y}_0\mu) \longrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0\mu) = (\bar{\mathfrak{y}}_0)$$

$$(\mathfrak{y}_1) \longrightarrow (\mathfrak{y}_1) \longrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_1)$$

即チ $\mathfrak{S}C_\mu$ ハ PSL ノ Kollineation デ, 而モ與ヘラレタ條件ヲ滿足スル.

$(\mathfrak{y}_0)$ ヲ動カサナイ PSL ノ変換ノ部分群ヲ $\mathfrak{H}_y$ トスレバ, $\mathfrak{H}_y$ ノ行列ハ

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathfrak{S}^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

ノ形デアル. ソノ中デ

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots\cdots & \alpha_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ノ形ノモノ全体ハ可換ナ normalteiler $\mathfrak{N}_0$ ヲ作ッテ居ル.

サテ, $\mathfrak{N}$ ハ PSL ノ normalteiler デ単位群デハ

ナイトスル。

PSLガ zweifach transitiv ダカラ, $\mathfrak{N}$ ハ transitiv デアル。[20]

然ツテ $\mathfrak{h}_y\mathfrak{N}=$PSL ニナル。$\mathfrak{N}_0\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{h}_y\mathfrak{N}=$PSL ノ Normalteiler デアルカラ, $\mathfrak{N}_0$ ニ含マレル B_{0i},λ ノミナラズ, ソノ共軛元ナル B_{ij},λ ヲスベテ含ム。即チPSLノ生成元ヲスベテ含ムカラ $\mathfrak{N}_0\mathfrak{N}=$PSL シタガッテ

$$\mathrm{PSL}/\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_0\mathfrak{N}/\mathfrak{N}\cong\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}_0\cap\mathfrak{N}$$

デアルガ右辺ハ可換群デアリ, 一方PSLハ vollkommen デアッテ可換ナ Faktorgruppe $\neq(1)$ ヲ持タナイカラ

$$\mathrm{PSL}=\mathfrak{N}$$

デナケレバナラナイ。即チPSLハ單純デアル。(單純性ノ證明終)

§4. lineare Kollineation ノ幾何學的特徴附ケ.

---

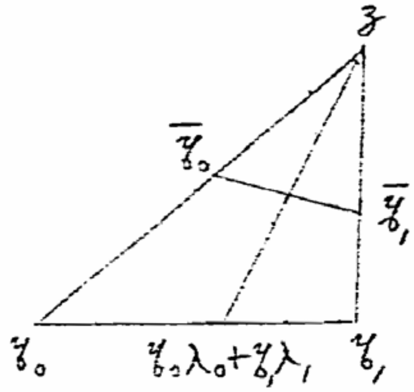
20) 任意ニ二点 $(\bar{\mathfrak{x}}_0)$, $(\bar{\mathfrak{x}}_1)$ ヲトルトキ, $(\bar{\mathfrak{x}}_0)\to(\bar{\mathfrak{x}}_1)$ ナル $\mathfrak{N}$ ノ變換ガアル。$(\bar{\mathfrak{x}}_0)=(\bar{\mathfrak{x}}_1)$ ナラ問題ハナイ。∴ $(\bar{\mathfrak{x}}_0)\neq(\bar{\mathfrak{x}}_1)$ トスル。$\mathfrak{N}\neq(1)$ ダカラ $\mathfrak{N}\ni$T デ一点 $(\mathfrak{x}_0)$ ヲソレト異ナル $(\mathfrak{x}_1)$ ヘ移スモノガアル。PSL$\ni S$ デ $(\mathfrak{x}_0)\to(\bar{\mathfrak{x}}_0)$, $(\mathfrak{x}_1)\to(\bar{\mathfrak{x}}_1)$ ナルモノガアル

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{x}_0 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & \mathfrak{x}_1 \arrow[d, "S"] \\ \bar{\mathfrak{x}}_0 & \mathfrak{x}_1 \end{tikzcd}$$

STS^{-1} ハ $(\bar{\mathfrak{x}}_0)$ ヲ $(\bar{\mathfrak{x}}_1)$ ニ持ッテ行ク.

$\mathfrak{P}_{n+1}(\mathfrak{K})$, $n \geqq 2$ ノ中ニアル直線 g 上ノ点ヲ g 外ノ一点 Z カラ射影シ, ソレヲ $Z \vee g$ 内ノ Z ヲ通ラヌ直線 $\bar{g}$ デ切レバ, g 上ノ点列カラ g' 上ノ点列ヘノ一対一変換ガ出来ルガ, 之ヲ g カラ $\bar{g}$ ヘノ（Z ヲ中心トスル）<u>Perspektivität</u> ト云フ。$g \longrightarrow g^{(1)}$, $g^{(1)} \longrightarrow g^{(2)}, \cdots\cdots, g^{(n-1)} \longrightarrow g^{(n)} = \bar{g}$ ナル Perspektivität ヲ合成シタモノヲ g カラ $\bar{g}$ ヘノ <u>Projektivität</u> トイフ。

$g = (\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1)$, $Z = (\mathfrak{z})$ トスレバ Z ヲ中心トスル Perspektivität デ $(\mathfrak{y}_0) \to (\bar{\mathfrak{y}}_0) = (\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{z}\alpha)$, $(\mathfrak{y}_1) \longrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_1) = (\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}\beta)$ トナル。$\mathfrak{y}_0\lambda_0 + \mathfrak{y}_1\lambda_1$ ハ



$\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0 + \bar{\mathfrak{y}}_1\lambda_1$ ニ行ク。何トナレバ

$$\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0 + \bar{\mathfrak{y}}_1\lambda_1$$
$$= \mathfrak{y}_0\lambda_0 + \mathfrak{y}_1\lambda_1 + \mathfrak{z}(\alpha\lambda_0 + \beta\lambda_1)$$

ハ直線 $\bar{g} = (\bar{\mathfrak{y}}_0, \bar{\mathfrak{y}}_1)$ ノ上ニモ直線 $(\mathfrak{z}, \mathfrak{y}_0\lambda_0 + \mathfrak{y}_1\lambda_1)$ ノ上ニモアリ, 従ッテソノ交点ダカラデアル。即チ

「$\mathfrak{z}$ ガ $\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1$ ト独立ナルトキ

$$(\mathfrak{y}_0\lambda_0 + \mathfrak{y}_1\lambda_1) \longrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0 + \bar{\mathfrak{y}}_1\lambda_1),$$
$$\bar{\mathfrak{y}}_0 = \mathfrak{y}_0 + \alpha\mathfrak{z}, \quad \bar{\mathfrak{y}}_1 = \mathfrak{y}_1 + \beta\mathfrak{z}$$

ハ Perspektivität デアル」

$\mathfrak{z}$ ガ $(\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1)$ ニ属スレバ, 之ハ Perspektivität デハナイ。併シ Projektivität ニハナル。ソレハ $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_1$ ト独立ナ $\mathfrak{z}'$ ヲトリ

$$\mathfrak{y}_0 \to \mathfrak{y}_0+(\mathfrak{z}+\mathfrak{z}')\alpha \to \mathfrak{y}_0+(\mathfrak{z}+\mathfrak{z}')\alpha - \mathfrak{z}'\alpha$$
$$\mathfrak{y}_1 \to \mathfrak{y}_1+(\mathfrak{z}+\mathfrak{z}')\beta \to \mathfrak{y}_1+(\mathfrak{z}+\mathfrak{z}')\beta - \mathfrak{z}'\beta$$

ノ如ク，夫々 $(\mathfrak{z}+\mathfrak{z}')$ 及ビ $(\mathfrak{z}')$ ヲ中心トスル二ツノ Perspektivität ヲ合成スレバヨイカラデアル，但シ $\bar{\mathfrak{y}}_0$ モ $\bar{\mathfrak{y}}_1$ モ勿論 0 デハナイトスル。

扨テ $\bar{\mathfrak{y}}_0$, $\bar{\mathfrak{y}}_1$ ハ任意ノ独立ナ Vektor トスル。コノトキ

$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{y}_0) \longrightarrow (\mathfrak{y}_0+(\bar{\mathfrak{y}}_0-\mathfrak{y}_0))=(\bar{\mathfrak{y}}_0) \\ (\mathfrak{y}_1) \longrightarrow (\mathfrak{y}_1+(\bar{\mathfrak{y}}_0-\mathfrak{y}_0)0)=(\mathfrak{y}_1) \\ (\mathfrak{y}_0\lambda_0+\mathfrak{y}_1\lambda_1) \longrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0+\mathfrak{y}_1\lambda_1)\end{array}\right\}\text{及}$$

$$\left.\begin{array}{l}(\bar{\mathfrak{y}}_0) \longrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0+(\bar{\mathfrak{y}}_1-\mathfrak{y}_1)0)=(\bar{\mathfrak{y}}_0) \\ (\mathfrak{y}_1) \longrightarrow (\mathfrak{y}_1+(\bar{\mathfrak{y}}_1-\mathfrak{y}_1))=(\bar{\mathfrak{y}}_1) \\ (\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0+\mathfrak{y}_1\lambda_1) \longrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\lambda_1)\end{array}\right\}$$

ナル二ツノ Projektivität ヲ合成シタモノトシテ

$$(\mathfrak{y}_0\lambda_0+\mathfrak{y}_1\lambda_1) \to (\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\lambda_1)$$

ハ矢張リ Projektivität デアル。逆ニ Perspektivität ハコノ形ダカラ，ソレヲ合成シタ Projektivität モ常ニコノ形デアル。即チ

「$g=(\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1)$, $\bar{g}=(\bar{\mathfrak{y}}_0, \bar{\mathfrak{y}}_1)$ ナレ任意ノ Vektor $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_1$, $\bar{\mathfrak{y}}_0$, $\bar{\mathfrak{y}}_1$ ニ對シ

$$(\mathfrak{y}_0\lambda_0+\mathfrak{y}_1\lambda_1) \longrightarrow (\bar{\mathfrak{y}}_0\lambda_0+\bar{\mathfrak{y}}_1\lambda_1)$$

ハ g カラ $\bar{g}$ ヘノ Projektivitat デアル。逆ニ g カラ $\bar{g}$ ヘノ任意ノ Projektivitat ハ，$\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{y}_1$ ニ對シ $\bar{\mathfrak{y}}_0$, $\bar{\mathfrak{y}}_1$ ヲ適當ニトレバコノ形ニナル」

「gカラg自身ヘノ Projektivität ハ即チgノ lineare Kollineation ニ他ナラナイ」

特ニ $\bar{\mathfrak{y}}_0 = \mathfrak{y}_0\rho$, $\bar{\mathfrak{y}}_1 = \mathfrak{y}_1\rho$ トスレバ

$$(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\lambda) \to (\mathfrak{y}_0\rho+\mathfrak{y}_1\rho\lambda) = (\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1\rho\lambda\rho^{-1})$$

故ニ，ρガ $Z(K)$ ニ属シナイナラ，之ハ恒等変換デハナイガ，例ヘバ三点$(\mathfrak{y}_0)$, $(\mathfrak{y}_1)$, $(\mathfrak{y}_0+\mathfrak{y}_1)$ハ固定点デアル。即チ「三点ヲ固定スル Projektivität ハ恒等変換デアル」ト云フ所謂「基本定理」ハKガ非可換ノ時ニハ成立タナイ。

「$\mathfrak{P}_{n+1}$ $(n \geqq 2)$ ノ lineare Kollineation トハ，任意ノ直線ニ Projektivität ヲ引キ起ス様ナ Kollineation デアル」

lineare Kollineation ナラバ，$\bar{\mathfrak{y}}_i$ ヲ適当ニトレバ，対応スルKノ自己同型ハ Identität ニナルカラ

$$\left(\sum \mathfrak{y}_i\lambda_i\right) \to \left(\sum \bar{\mathfrak{y}}_i\lambda_i\right)$$

ノ形ニナル。従ツテ二次元 Teilmodul ニKヲ Operator トスル一次変換ヲウケル．即チ直線ハ Projektivität ヲウケル。逆ニ直線$(\mathfrak{y}_0, \mathfrak{y}_1)$ガ Projektivität ヲ受ケレバ，ソレニ対応スルKノ自己同型ハ Identität ダカラ，定義ニヨリコノ Kollineation ハ linear デアル。[21] q.e.d.

21) コノ証明デ明カナヤウニ少クトモ一ツノ直線ガ Projektivität ヲ受ケレバ Kollineation ハ linear ニナリ，従ツテスベテノ直線ガ Projektivität ヲ受ケル。

lineare Kollineation ノモウ一ツノ幾何的 Charakterisation ヲ述ベル。同時ニPSLノ Kollineation ノ幾何學的意味モ考ヘル。ソノタメニ次ノ定義ヲ想起スル.

n次元射影空間ノ Kollineation ガ，アル超平面πノ各点ヲ動カサズ，アル点Pヲ含ム各超平面ヲ動カサナイ時，コノ Kollineation ヲ相應（Homologie 又ハ perspektive Kollineation, axiale Kollineation 等）ト云フ。而シテPヲ相應ノ中心，πヲ相應ノ軸（超平面）ト云フ。特ニPガπノ上ニアルトキ，特殊相應（spezielle Homologie）ト云フコトニスル。

1° 「$\mathfrak{G}_0$ ノ生成元，C_μ, $B_{ij,\lambda}$ ハスベテ相應デアル。$B_{ij,\lambda}$ ハ特殊相應デアリ，C_μ ハ特殊相應ナラザル相應デアル。」

C_μ: $\bar{y}^0 = y^0\mu$, $\bar{y}^k = y^k$, $k \neq 0$. 即チ $\pi = (y^1, —, y^n)$ ヲ軸トシ，ソノ上ニナイ $P = (y^0)$ ヲ中心トスル相應デアル。

$B_{ij,\lambda}$: $\bar{y}^j = y^j + y^i\lambda$, $\bar{y}^k = y^k$, $k \neq j$. 即チ $\pi = (y^0, —, y^{j-1}, y^{j+1}, —, y^n)$ ヲ軸トシ，其上ノ点 $P = (y^i)$ ヲ中心トスル相應デアル。[22]

22) 詳シク云ヘバ次ノ如シ. C_μ ノ場合，Pヲ通ル任意ノ超平面ハ $\xi = (y^0, \eta^1, —, \eta^{n-1})$ $(\eta^i) \subset \pi$ ノ形ニカケル. ソノ像 $\bar{\xi} = (\bar{y}^0, \bar{\eta}^1, —, \bar{\eta}^{n-1}) = (y^0\mu, \eta^1, —, \eta^{n-1})$

2°「相應ハ lineare Kollineation デアリ、特殊相應ナラザル相應ハ或 C_μ ト $\mathfrak{g}_0$ 内デ共軛、又特殊相應ハ $B_{10,1}$ ト共軛デアル。即チ任意ノ相應ハ $\mathfrak{g}_0 = PL$ ニ屬シ、任意ノ特殊相應ハ $\mathfrak{h} = PSL$ ニ屬スル。」

一般ニ一直線上ノスベテノ點ヲ動カサナイ様ナ Kollineation ハ明カニ linear デアルカラ、一超平面上ノスベテノ點ヲ動カサナケレバ勿論 linear デアル。軸ヲ $\pi = (\mathfrak{y}^1, \text{—}, \mathfrak{y}^n)$ トスレバ $\left(\sum_1^n \bar{\mathfrak{y}}^i \lambda_i\right) = \left(\sum_1^n \mathfrak{y}^i \lambda_i\right)$ ヨリ $\bar{\mathfrak{y}}^i = \mathfrak{y}^i \zeta,\ \zeta \in Z$ デナケレバナラナイ。行列全体ニ ζ^{-1} ヲカケテモ差支ナイカラ

$$\bar{\mathfrak{y}}^i = \mathfrak{y}^i \qquad i = 1, \text{——}, n$$

トシテヨイ。特殊相應デナケレバ、中心 $P = (\mathfrak{y}^0)$ トスレバ $(\bar{\mathfrak{y}}^0) = (\mathfrak{y}^0)$ ダカラ

$$\bar{\mathfrak{y}}^0 = \mathfrak{y}^0 \mu$$

即チ坐標系 $(\mathfrak{y}^0, \mathfrak{y}^1, \text{—}, \mathfrak{y}^n)$ デアラハシタ行列ハ C_μ ニナル。

特殊相應ノバアヒニハ、中心 $P = (\mathfrak{y}^1)$ ナラシメテオ

ハ ξ ニ一致スル。$B_{ij,\mu}$ ノ場合、P ヲ通ル超平面 ξ ニ於テ、$\xi = \pi$ ノトキハ問題ナイ。$\xi \neq \pi$ ナラバ

$\xi = (\mathfrak{y}^i, \mathfrak{y}^1, \text{—}, \mathfrak{y}^{n-2}, \mathfrak{z})$；$(\mathfrak{y}^i) \subset \pi$, $(\mathfrak{z}) \not\subset \pi$ ノ形ニカケル。従ッテ $\mathfrak{z} = \mathfrak{y}^j + \mathfrak{y}$, $(\mathfrak{y}) \subset \pi$ トシテヨイ。コノトキ $\bar{\xi} = (\bar{\mathfrak{y}}^i, \bar{\mathfrak{y}}^1, \text{—}, \overline{\mathfrak{y}^{n-2}}, \overline{\mathfrak{y}^j + \mathfrak{y}}) = (\mathfrak{y}^i, \mathfrak{y}^1, \text{—}, \mathfrak{y}^{n-2}, \mathfrak{y}^j + \mathfrak{y}^i \lambda + \mathfrak{y})$ ハ ξ ニ一致スル。

7. 又 $(\mathfrak{y}^0)$ ハ π 上ニナイ任意ノ点トスル直線 $(\mathfrak{y}^0, \mathfrak{y}^1)$ ハ（$(\mathfrak{y}^1)$ ヲ通ル不変ナ超平面ノ交ハリトシテ）不変デアルカラ，$(\mathfrak{y}^0)$ ハコノ直線上ノ $(\mathfrak{y}^1)$ ナラザル点ニ移ル。$(\overline{\mathfrak{y}^0}) = (\mathfrak{y}^0)$ ナラ C_μ トナリ特殊相應デナクナルカラ，$(\overline{\mathfrak{y}^0}) \neq (\mathfrak{y}^0)$ 故ニ $\mathfrak{y}^0$ ノ右ノ因数ヲ適當ニスレバ $(\overline{\mathfrak{y}^0}) = (\mathfrak{y}^0+\mathfrak{y}^1)$ 即チ $\overline{\mathfrak{y}}_0 = (\mathfrak{y}^0+\mathfrak{y}^1)\rho$ デアルガ，コノ ρ ハ $\rho=1$ デナケレバナラナイ。ソレハ例ヘバ P ヲ通ル超平面

$\mathfrak{z} = (\mathfrak{y}^0+\mathfrak{y}^n, \mathfrak{y}^1, \ldots, \mathfrak{y}^{n-1})$ ハ

$\overline{\mathfrak{z}} = ((\mathfrak{y}^0+\mathfrak{y}^1)\rho+\mathfrak{y}^n, \mathfrak{y}^1, \ldots, \mathfrak{y}^{n-1}) = (\mathfrak{y}^0\rho+\mathfrak{y}^n, \mathfrak{y}^1, \ldots, \mathfrak{y}^{n-1})$

ニナルガ，$\overline{\mathfrak{z}}=\mathfrak{z}$ ダカラ $\rho=1$ トナルコトヨリ分ル。即チ特殊相應ハ

$$\overline{\mathfrak{y}^0} = \mathfrak{y}^0+\mathfrak{y}^1$$
$$\overline{\mathfrak{y}^i} = \mathfrak{y}^i \qquad i=1, \ldots, n$$

換言スレバ，適當ナ坐標系 $(\mathfrak{y}^0, \mathfrak{y}^1, \ldots, \mathfrak{y}^n)$ デ $B_{01,1}$ ノ形ニナル。

元々與ヘラレタ坐標系デアラハセバ，夫々 C_μ 及 $B_{01,1}$ ト $\mathfrak{G}$ 内デ共軛ナ変換トナル。 q. e. d.

PSL ノ Kollineation ヲ spezielle lineare Kollineation ト云フコトニスレバ，1°, 2° ヲ綜合シテ

3°「lineare Kollineation ハ有限個ノ相應ヲ合成シタモノデアル。

spezielle lineare Kollineation ハ有限個ノ特殊相應ヲ合成シタモノデアル。」